

# Fragen zu Hydrodynamik

## Verständnisfragen

1. Was macht eine Newtonsche Flüssigkeit aus?

Lösung: Seine Stromstärke durch ein Rohr steigt linear mit der Druckdifferenz zwischen Anfang und Ende des Rohres. Ihre Viskosität ist dabei unabhängig von der Geschwindigkeit.

2. Warum eignen sich Flüssigkeiten gut zur Übertragung von Kräften?

Lösung: Weil Flüssigkeiten volumenbeständig sind, sie sich also nur unter sehr hohen Drücken sichtbar zusammenpressen lassen.

3. Wie unterscheiden sich statischer und dynamischer Druck?

Lösung: Der statische Druck entspringt aus der potenziellen Energie einer unter Druck stehenden Flüssigkeit, der dynamische Druck aus der kinetische Energie ihrer Strömung.

4. Beschreiben sie laminare und turbulente Strömung.

Lösung: Bei einer laminaren Strömung gleiten benachbarte Flüssigkeitsschichten ohne Verwirbelung aneinander vorbei. Bei einer turbulenten Strömung dagegen kommt es bei der Bewegung zu Verwirbelungen.

## Rechenaufgaben

5. Aus historischen Gründen werden in der Medizin Drücke wie z.B. der Blutdruck noch immer in der Einheit Millimeter Quecksilbersäule (mmHg) angegeben. Quecksilber hat die Dichte  $13,55\text{g/cm}^3$  bei Normalbedingungen.

- a) Berechnen Sie den Druck von 1mmHg in SI-Einheiten.
- b) Ein Blutdruckmessgerät misst einen Druck von 15,73kPa. Wie viel ist das in mmHg?
- c) Warum ist die Messung von Drücken mit Hilfe von Quecksilbersäulen keine übliche Vorgehensweise mehr?

Lösung:

- a) Für Drücke gilt die Formel  $p = \frac{F}{A} = \frac{m \cdot g}{A} = \frac{\rho \cdot V \cdot g}{A} = \frac{\rho \cdot h \cdot A \cdot g}{A} = \rho \cdot h \cdot g$ . Für den Druck von einem Millimeter Quecksilbersäule unter Normalbedingungen ergibt sich somit  $p = 13550 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,001\text{m} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 132,93 \frac{\text{kg}}{\text{ms}^2} = 132,93\text{Pa}$ .

- b) Aus der Lösung von a erkennt man, dass  $1\text{mmHg} \approx 132,93\text{Pa}$ . Damit lässt sich leicht bestimmen  $p = \frac{15730\text{Pa}}{132,93\text{Pa}} \approx 118,33\text{mmHg}$ .

- c) Wie bereits mit dem Beisatz „bei Normalbedingungen“ angedeutet ist die Dichte von Quecksilber nicht konstant, sondern abhängig von der Umgebungstemperatur und dem Luftdruck. Diese Eigenschaft wird sich beispielsweise in Quecksilberthermometern zunutze gemacht. Darüber hinaus ist Quecksilberdampf toxisch und darum die früher

übliche Messung von Drücken mit mit Quecksilber gefüllten offenen U-Rohren für die Anwendung am Menschen ungeeignet.

6. Menschen haben eine mittlere Dichte von  $1,03\text{g/cm}^3$  nach dem Ausatmen. Bei mit Luft gefüllter Lunge liegt ihre mittlere Dichte bei lediglich  $0,96\text{g/cm}^3$ .
- Destilliertes Wasser hat eine Dichte von  $0,997\text{g/cm}^3$ . Bestimmen Sie die Auftriebskraft Ihres Körpers beim ein- und ausatmen und vergleichen Sie diese mit der Gewichtskraft.
  - Eine 20%-ige Kochsalzlösung hat eine Dichte von  $1,148\text{g/cm}^3$ . Bestimmen Sie auch hier die Auftriebskraft Ihres Körpers und vergleichen Sie sie mit der Gewichtskraft.
  - Bestimmen Sie Ihre effektive Masse in Süßwasser. Warum fühlt sich der Körper im Wasser fast schwerelos an?

Lösung:

- Hier gibt es keine eindeutige Lösung, da die Lösung von der Masse des Studenten abhängt. Das dem Studenten eigene Volumen sollte über  $V = \frac{m}{\rho_{\text{Mensch}}}$  berechnet werden, die Auftriebskraft ergibt sich dann aus  $F_{\text{auf}} = \rho_{\text{Med}} \cdot g \cdot V$ , für die Gewichtskraft  $F_G = m \cdot g$ . Die Lösung der Studenten sollte zeigen, dass  $F_{\text{auf}} > F_G$  bei luftgefüllter Lunge und  $F_{\text{auf}} < F_G$  bei leerer Lunge gilt.
- Es gelten dieselben Formeln wie bei a. Hier sollte sich nun aber zeigen, dass sowohl bei luftgefüllter als auch bei leerer Lunge  $F_{\text{auf}} > F_G$  ist.
- Die effektive Masse ergibt sich aus

$$\begin{aligned} F_{\text{eff}} &= F_G - F_{\text{auf}} \\ \Leftrightarrow m_{\text{eff}} \cdot g &= m \cdot g - \rho_{\text{Med}} \cdot g \cdot V \\ \Leftrightarrow m_{\text{eff}} &= m - \rho_{\text{Med}} \cdot V \end{aligned}$$

Eine negative effektive Masse zeigt hierbei den resultierenden Auftrieb. Die effektive Masse wird sehr klein, weshalb der Körper sich fast schwerelos anfühlt.

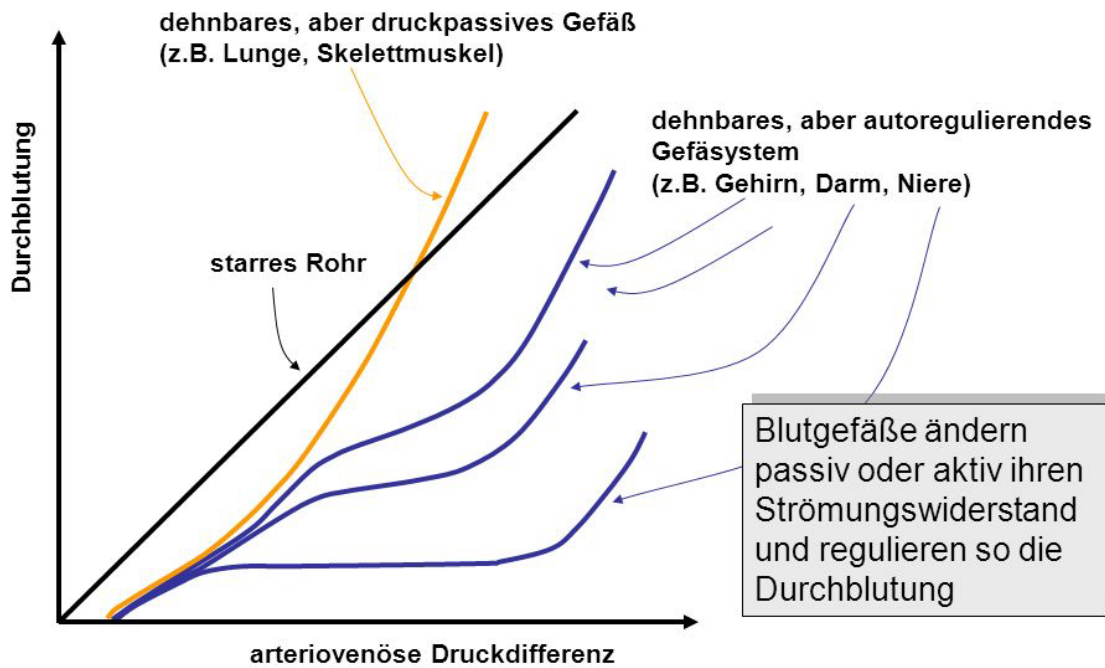
7. Die Aorta ist die Hauptarterie im menschlichen Körper und schließt direkt an das Herz an. Beim Erwachsenen hat sie einen Durchmesser von etwa 2,5cm und eine Länge von etwa 35cm. Blut ist eine nichtnewtonsche Flüssigkeit, verhält sich jedoch in Gefäßen mit einem Durchmesser der sehr viel größer als die Blutpartikel ist näherungsweise wie eine newtonsche Flüssigkeit.
- Die Pumpleistung des Herzens eines gesunden Erwachsenen beträgt etwa 5l/min. Bestimmen Sie die mittlere Fließgeschwindigkeit von Blut in der Aorta sowie die Druckdifferenz zwischen ihren Enden.  
  
Tipp: Die Viskosität von Blut bei Körpertemperatur in großen Gefäßen hat einen Wert von  $\eta = 4\text{mPa} \cdot \text{s}$ .
  - Bestimmen Sie den Gesamtdruck am Ende der Aorta. Beachten sie, dass die Aorta vertikal durch den Körper verläuft. Berechnen Sie diesen auch in mmHg. Vergleichen Sie ihn mit den Standard-Blutdruckwerten eines gesunden Erwachsenen.

Tipp: Die Dichte von Blut beträgt etwa  $1,058\text{g/cm}^3$ , der statische Druck in den menschlichen Blutgefäßen beläuft sich auf etwa  $6,5\text{mmHg}$ .

- c) Bestimmen Sie den Strömungswiderstand der Aorta.
- d) In Folge einer Atherosklerose verringert sich nun der Durchmesser der Aorta an einer Stelle um  $0,8\text{cm}$ . Bestimmen Sie den an dieser Stelle vorliegenden dynamischen Druck. Vergleichen Sie ihn mit dem dynamischen Druck ohne Atherosklerose. Erklären Sie, warum starke Atherosklerosen langfristig häufig zu Gefäßaneurysmen führen.
- e) Auf Höhe des vierten Lendenwirbels teilt die Aorta sich in die beiden großen Beckenschlagadern. Diese haben einen Durchmesser von etwa  $1\text{cm}$  und eine Länge von etwa  $3,5\text{cm}$  bevor Sie sich weiter verzweigen. Bestimmen Sie die Stromstärke und den Strömungswiderstand der Beckenschlagadern.
- f) Welchen Gesamtwiderstand hat das System von Aorta und Beckenschlagadern?

Lösung:

- a) Nach der Kontinuitätsgleichung gilt  $J_1 = J_2$ . Der Volumenfluss durch die Aorta muss darum gleich dem Volumenfluss durch das Herz sein. Für den Volumenfluss gilt  $J = Av \Leftrightarrow v = \frac{J}{A}$ . Es gilt außerdem nach Hagen-Poiseuille für newtonsche Flüssigkeiten bei laminarer Strömung  $J = \frac{\pi \cdot r^4 \cdot \Delta p}{8 \cdot \eta \cdot l} \Leftrightarrow \Delta p = \frac{8 \cdot J \cdot \eta \cdot l}{\pi r^4}$ . Man erhält für den Volumenfluss in der Aorta in SI-Einheiten  $5 \frac{\text{l}}{\text{min}} \approx 8,33 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ . Daraus ergibt sich eine Flussgeschwindigkeit von  $v = \frac{8,33 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{\pi (0,5 \cdot 0,025\text{m})^2} \approx 0,17 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Für die Druckdifferenz erhält man  $\Delta p = \frac{8 \cdot 8,33 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cdot 0,004\text{Pa} \cdot \text{s} \cdot 0,35\text{m}}{\pi (0,5 \cdot 0,025\text{m})^4} \approx 12,16\text{Pa}$ .
- b) Nach dem Gesetz von Bernoulli gilt  $p = p_{\text{stat}} + p_{\text{dyn}} + p_{\text{schwer}} = p_{\text{stat}} + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 + \rho g h$ . Der Umrechnungsfaktor zwischen mmHg und Pa beträgt  $133,322$ . Man erhält somit  $p = (6,5 \cdot 133,322)\text{Pa} + \frac{1}{2} \cdot 1058 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \left(0,17 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 1058 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,35\text{m} \approx 4514,52\text{Pa}$ . Das entspricht einem Druck von etwa  $33,86\text{mmHg}$ . Dieser Druck ist sehr viel kleiner als der standardmäßig angegebene Blutdruck eines Erwachsenen. Dies liegt zum einen daran, dass Blut eine nichtnewtonsche Flüssigkeit ist und zum anderen, dass die Aorta wie alle Gefäße keine konstanten Durchmesser hat sondern diesen dem inneren Druck anpasst. Dies führt dazu, dass die Volumenstrom-Druck-Abhängigkeit nicht linear verläuft, sondern exponentiell ansteigt. Da die Aorta die Arterie mit dem höchsten Volumenstrom im Körper ist, ist hier der Druck höher, als er im starren Rohr wäre.



- c) Der Strömungswiderstand wird über  $R = \frac{\Delta p}{J}$  bestimmt. Er beträgt somit  $R \approx 145978,39 \frac{Pas}{m^3}$  oder über  $R = \frac{8\eta l}{\pi r^4} \Rightarrow R \approx 146025,30 \frac{Pas}{m^3}$  (wegen Rundungsfehlern).
- d) Durch die Verengung steigt die Blutgeschwindigkeit nach der Kontinuitätsgleichung folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 A_1 \cdot v_1 &= A_2 \cdot v_2 \\
 \Leftrightarrow v_2 &= \frac{A_1 v_1}{A_2} \\
 \Leftrightarrow v_2 &= \frac{\pi r_1^2 v_1}{\pi r_2^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 v_1 \\
 \Rightarrow v_2 &\approx 0,37 \frac{m}{s}
 \end{aligned}$$

Der dynamische Druck berechnet sich nun über  $p_{dyn} = \frac{1}{2} \rho v^2 \Rightarrow p_{dyn} \approx 72,42 Pa$ . Der dynamische Druck ohne Atherosklerose beträgt etwa  $p_{dyn} = 15,29 Pa$ , ist also um fast einen Faktor 5 niedriger. Der dynamische Druck geht quadratisch mit der Geschwindigkeit, welche wiederum umgekehrt proportional zum Quadrat des Radius ist. Der höhere Druck sorgt für eine höhere Belastung der Gefäßwände und führt dadurch zu Aussackungen, den Aneurysmen.

- e) Nach dem 1. Kirchhoffschen Gesetz gilt  $J_{tot} = J_1 + J_2 + J_3 + \dots$  und somit  $J_{Aorta} = 2J_{Becken}$  in diesem Fall. Man erhält also  $J_{Becken} = \frac{1}{2} J_{Aorta}$ . Der Volumenfluss in der Beckenschlagader beträgt also  $J_{Becken} \approx 4,17 \cdot 10^{-5} \frac{m^3}{s}$ . Für den Widerstand R erhält man mit  $R = \frac{8\eta l}{\pi r^4} \Rightarrow R_{Becken} \approx 570411,32 \frac{Pas}{m^3}$ .

- f) Für verzweigende Röhren wie hier im Fall der Beckenschlagadern gilt  $\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ .  
Da hier beide Schlagadern denselben Widerstand haben erhält man  $\frac{1}{R_{ges}} = \frac{2}{R} \Leftrightarrow R_{ges} = \frac{R}{2}$ . Die Widerstände von aufeinander folgenden Röhren addieren sich. Man erhält somit für den Gesamtwiderstand des Systems  $R_{ges} = R_{Aorta} + \frac{R_{Becken}}{2} \Rightarrow R_{ges} \approx 14887735,66 \frac{Pa \cdot s}{m^3}$ .